المراجعة الشاملة ل شابتر 4

✳ التكامل الغير محدود:

① التكامل هو عملية عكسية لعملية الاشتقاق فاذا كاملت دالة بعد كذا اشتقيت ناتج التكامل ارجع للدالة الاصلية

مثال:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

ثابت التكامل فقد مع التكامل الغير محدود

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = 3\frac{x^{3-1}}{3} + 0 = x^2$$

✳ تكامل الدالة الاسية تزود على الاس واحد وتقسم على الاس الجديد

Table 4.2.1

INTEGRATION FORMULAS

DIFFERENTIATION FORMULA	INTEGRATION FORMULA	DIFFERENTIATION FORMULA	INTEGRATION FORMULA
1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = x + C$	5. $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r\ (r \neq -1)$	$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\ (r \neq -1)$	6. $\frac{d}{dx}[-\cot x] = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
3. $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	7. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	8. $\frac{d}{dx}[-\csc x] = \csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

$$\int cf(x) + g(x)\,dx = c\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

✳ اذا كان يوجد ثابت داخل التكامل نستطيع اخراجه الى قبل التكامل ونستطيع توزيع التكامل على الجمع والطرح

مثال:

$$\int 3x^6 - 2x^2 + 7x + 1\,dx = 3\int x^6\,dx - 2\int x^2\,dx + 7\int x\,dx + \int 1\,dx$$

$$= 3\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$= \frac{3x^7}{7} - \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + x + C$$

⊗ التكامل بالتعويض ب u :

نستخدم التكامل بالتعويض عندما يوجد اكثر من دالة في التكامل مضروبة او مقسومة

وتكون غالباً دالة مضروبة في مشتقتها او مقسومة

مثال:

$$\int (x^2+1)^{50} \cdot 2x\,dx$$

$$u = x^2+1$$

$$du = 2x\,dx$$

نلاحظ ان جميع عناصر التكامل تحولت من x ل u

لان لايصح ان تكامل x في الـ u

الدالة بالتكامل يجب ان تصبح بصيغة u بعد ذلك تكامل

$$\int (u)^{50}\,du$$

$$\frac{u^{51}}{51} + C = \frac{(x^2+1)^{51}}{51} + C$$

مثال:

$$\int \cos 5x\,dx$$

$$u = 5x$$

$$du = 5\,dx \longrightarrow \frac{du}{5} = dx$$

قسمنا على 5 لان لايوجد 5 في الدالة الاصلية وموجودة في المشتقة

$$\int \cos u \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{5}\sin(u) + C$$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x) + C$$

بعد ماتكامل نرجع الـ u ل x

مثال:

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

$u = x-1$

$du = dx$

نلاحظ ان يوجد x^2 غير موجودة في u وغير موجودة في du
فيجب ان نحول x^2 ل u

$u = x-1 \longrightarrow u+1 = x \longrightarrow x^2 = (u+1)^2$

$x^2 = u^2+2u+1$

$$\int (u^2+2u+1)\sqrt{u}\,du = \int (u^2+2u+1)(u^{1/2})\,du$$

$$\int u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2}\,du = \frac{u^{7/2}}{7/2} + 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

ايجاد التكامل المحدود بالرسم :

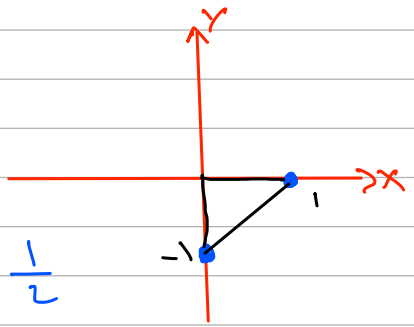
طريقة ايجادها بالرسم عن طريق تعويض قيم حدود التكامل (x) في الدالة لايجاد قيم y وبالتالي نحدد النقاط على محور x و y ونوصل بين هذه النقاط لنحدد شكل الرسمة و نستخدم معادلة الرسمة لايجاد المساحة

مثال: $\int_0^1 (x-1)\,dx$

$y = x - 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 1 \Rightarrow y = -1 \quad (0,-1)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 \Rightarrow y = 0 \quad (1,0)$



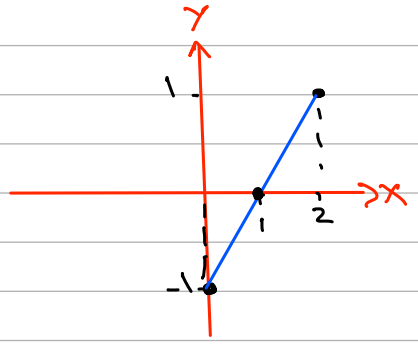
$\int_0^1 x-1\,dx = \frac{1}{2}(B.h) = -\frac{1}{2}(1)(1) = -\frac{1}{2}$

مثال: $\int_0^2 (x-1)\,dx$

$y = x - 1$

$x = 0 \longrightarrow y = 0 - 1 \longrightarrow y = -1 \quad (0,-1)$

$x = 2 \longrightarrow y = 2 - 1 \longrightarrow y = 1 \quad (2,1)$



$y = 0$

$0 = x - 1 \longrightarrow x = 1$

$\int_0^2 (x-1)\,dx = A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2$

$= \frac{1}{2}(b_1 . h_1) - \frac{1}{2}(b_2 . h_2)$

$= \frac{1}{2}(1.1) - \frac{1}{2}(1.1) = 0$

في هذه الحالة لانه يوجد جزء من الرسمة في y+ وجزء في y- تصبح رسمتين فنحتاج ان نوجد النقطة التي تقطع لكي نعوضها ايجاد مساحة كل مثلث فيهم لذالك عوضنا y بصفر واوجدنا x

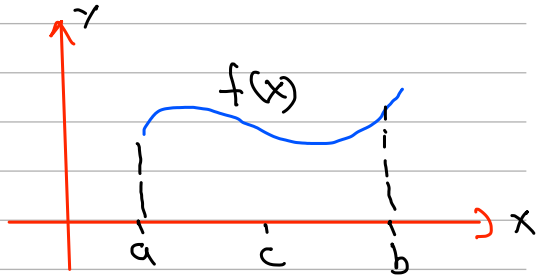
التكامل لنفس الحدين يساوي صفر $\int_2^2 x\,dx = 0$

اذا كان حد التكامل الكبير تحت والصغير فوق نعكس الحدود و نغير اشارة التكامل لما لب

$\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

⊗ اذا كانت الدالة قابلة للتكامل على ثلاثة نقاط اذ أنه نقوم بتوزيع التكامل عليهم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



مثال:

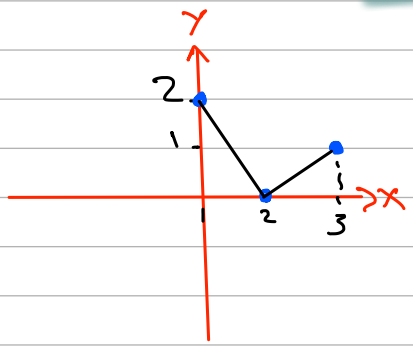
$$\int_0^3 |x-2|\,dx$$

$Y = X - 2$

$Y = 0 \longrightarrow 0 = X - 2 \longrightarrow X = 2$

$X = 0 \longrightarrow Y = |0-2| \longrightarrow Y = 2 \quad (0,2)$

$X = 3 \longrightarrow Y = |3-2| \longrightarrow Y = 1 \quad (3,1)$



لرسم الدالة المطلقة يجب ان نضع الـ Y بصفر

لايجاد قيمة X النقطة القاطعة

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(b_1)(h_1) + \frac{1}{2}(b_2)(h_2)$$

$$= \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{5}{2}$$

ايجاد التكامل المحدود :

طريقة ايجاد التكامل المحدود اولاً تكامل بعد كذا نعوض بحدود التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - f(a)$$

مثال:

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

نظرية القيمة المتوسطة :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

مثال:

$f(x) = 1/x^2 \quad [1,3]$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x_*^2}(3-1)$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^3 x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^3 = -x^{-1}\Big|_1^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{x_*^2}(3-1) \longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{x_*^2} \longrightarrow 2x_*^2 = 6 \longrightarrow x_*^2 = 3$$

$$\sqrt{x_*^2} = \sqrt{3} \longrightarrow x = \pm\sqrt{3} \longrightarrow x = \sqrt{3} \in [1,3]$$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (2)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

مثال:

$$F(x) = \int_1^x (3t^2 - 3)\,dt$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x (3t^2 - 3)\,dt$$

$$F'(x) = 3x^2 - 3$$

⊗ ايجاد التكامل المحدود بالتعويض :

① الطريقة الاولى : ان نقوم بعد التكامل بالتعويض باعادة كتابة الـ u بصيغة x ثم نعوض

مثال:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx$$

$$u=x^2+1 \quad , du=2x\,dx \longrightarrow \frac{du}{2}=x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int u^3\,du=\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}+c=\frac{u^4}{8}+c=\frac{(x^2+1)^4}{8}+c$$

$$=\frac{(2^2+1)^4}{8}-\frac{(0^2+1)^4}{8}=\frac{625}{8}-\frac{1}{8}=78$$

② الطريقة الثانية : نحول قيم حدود التكامل من x لـ u و نقوم بتحويل الحدود ايضاً من x لـ u و نعوض في u مباشرة دون الوجوع لصيغة x

مثال:

$$u=x^2+1 \quad , du=2x\,dx \longrightarrow \frac{du}{2}=x\,dx$$

$$x=0 \longrightarrow u=0^2+1=1 \longrightarrow u=1$$

$$x=2 \longrightarrow u=2^2+1=5 \longrightarrow u=5$$

$$\frac{1}{2}\int_1^5 u^3\,du=\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\Big)_1^5=\left(\frac{1}{2}\frac{5^4}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\frac{1^4}{4}\right)=78$$